3. En utilisant l'encadrement précédent, déterminer la limite de la somme $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

Pour tout entier $n\geq 2$, on pose $u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ et $a_n=\ln(u_n)$.

1. Vérifier que pour tout entier $n\geq 2$, $a_n=-\dfrac{\ln\left(1+(-\frac{1}{n})\right)}{(-\frac{1}{n})}$.

2. En déduire que la suite (a_n) est convergente.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

38 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A/ 1. a. Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie de C.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

c. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.

2. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C au point A.

b. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-f(x+1)$.

Montrer que pour tout réel x, $g'(x)=-\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

a. En déduire le sens de variation de la fonction g (on précisera $g(0)$).

b. En déduire la position de C et Δ.

3. Tracer la courbe C et Δ.

B/ Dans cette partie, on désigne par I, l'intervalle $[2,3]$.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=x$ si, et seulement si, $g(x)=-1$.

b. En déduire que la droite D d'équation $y=x$ coupe la courbe C en un seul point dont l'abscisse α est telle que $2<\alpha<3$.

2. On suppose que pour tous réels x et x' de I, $|f(x)-f(x')|\leq\frac{1}{2}|x-x'|$.

En déduire que, pour tout réel x de I, $|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

3. On définit la suite (u_n) d'éléments de l'intervalle I telle que $\begin{cases}u_0=3,\\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|3-\alpha|$.

b. Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

c. Donner en utilisant la calculatrice une valeur approchée de u_p.

39 A/ On désigne par g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=e^x-\ln(x)-xe^x+1$.

1. Déterminer la limite de g en 0.

2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

5. Justifier que $\alpha\in]1.23\ ,\ 1.24[$ (*).

6. Donner le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

B/ On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-\ln(x)} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

On désigne par C la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.